

M - rozmaitość $2n + 2$ wymiarowa. $f : M \rightarrow M$. $\Lambda \subset M$ - pierścień opisany współrzędnymi (I, ϕ) , gdzie $I \in [0, 1]$, $\phi \in \mathbb{S}^1$, niezmienniczy ze względu na f (dlatego czasem będę zapisywał f zamiast $f|_\Lambda$).

DEFINICJA 1. f nazywamy *monotonicznym odwzorowaniem przekrętu*, jeśli $\frac{\partial(p_\phi \circ f)}{\partial I} > 0$ w całym Λ .

DEFINICJA 2. *Pierwotny torus niezmienniczy* (PTN), to niezmienniczy ze względu na f , jednowymiarowy torus w Λ , który nie jest ściągalny do punktu w Λ .

Każdy taki torus jest wykresem pewnej funkcji lipszycowskiej (w większości definicji będę zakładał, że gładkiej, ale wyniki można przenieść na przypadek lipszycowski) od ϕ .

DEFINICJA 3. Obszar w Λ , ograniczony dwoma PTN, nie zawierający w swoim wnętrzu żadnego PTN nazywany jest *strefą niestabilności Birkhoffa*.

Strefy niestabilności Birkhoffa dla monotonicznych odwzorowań przekrętu posiadają ciekawą własność: jeśli jej torusy brzegowe są topologicznie tranzytywne, to istnieją tzw. orbity Birkhoffa, które przecinają dowolne otoczenie dowolnego punktu z pierwszego i z drugiego torusa brzegowego.

Zbiory i odwzorowania występujące w powyższych definicjach bardzo często się pojawiają po zaburzeniu całkowalnych układów Hamiltonowskich.

Model topologiczny problemu

Rozważam gładki dyfeomorfizm $F : M \rightarrow M$. Zakładam, że istnieje niezmiennicza podrozmaitość normalnie hiperboliczna Λ . W każdym punkcie $p \in \Lambda$ mamy n -wymiarowe rozmioty: stabilną i niestabilną ($W^s(p)$ i $W^u(p)$). $F|_\Lambda$ jest zachowującym formę objętości monotonicznym odwzorowaniem przekrętu. Dla dowolnego podzbioru $T \subset \Lambda$ (w szczególności dla PTN) można zdefiniować jego rozmaitość stabilną i niestabilną:

$$W^s(T) = \bigcup_{p \in T} W^s(p), \quad W^u(T) = \bigcup_{p \in T} W^u(p)$$

Rozmaitości te niekoniecznie są gładkie, ale ich włókna - tak. Ponadto, F przenosi ich włókna na włókna odpowiadające. Zakładam, że $W^s(T)$ i $W^u(T)$ przecinają się transwersalnie wzdłuż 2-wymiarowej rozmaitości gładkiej Γ zwanej *kanalem homoklinicznym*. Wtedy $\forall x \in \Gamma \quad T_x M = T_x W^u(\Lambda) + T_x W^s(\Lambda)$, $T_x W^u(\Lambda) \cap T_x W^s(\Lambda) = T_x \Gamma$. Z normalnej hiperboliczności Λ wynika, że dla dowolnego $x \in W^s(\Lambda)$ istnieje dokładnie jeden punkt $x^+ \in \Lambda$, taki, że $x \in W^s(x^+)$. Analogiczną funkcję pełni x^- dla $x \in W^u(\Lambda)$. Dla każdego punktu $x \in \Gamma$ mamy:

$$T_x W^s(\Lambda) = T_x W^s(x^+) \oplus T_x(\Gamma); \quad T_x W^u(\Lambda) = T_x W^u(x^-) \oplus T_x(\Gamma).$$

Przy tych wszystkich założeniach można zdefiniować odwzorowania $\Omega^+ : W^s(x) \ni x \rightarrow x^+ \in \Lambda$ oraz $\Omega^- : W^u(x) \ni x \rightarrow x^- \in \Lambda$. Zmniejszając ewentualnie Γ możemy założyć, że zawężenia $\Omega^\pm$ do Γ są homeomorfizmami. Dlatego możemy zdefiniować homeomorfizm $S = \Omega^+ \circ (\Omega^-)^{-1}$ o odpowiednio dopasowanej dziedzinie i przeciwdziedzinie. S nazywane jest *funkcją rozpraszania*.

Funkcja rozpraszania ma następującą własność: jeśli T, T' są niezmienniczymi gładkimi torusami w Λ i $S(T)$ ma przecięcie transwersalne z T' , to $W^u(T)$ ma transwersalne przecięcie z $W^s(T')$.

Model topologiczny:

Rozważamy ciąg PTN $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ w Λ . Ciąg ten jest podzielony na tzw. łańcuchy przechodnie $\{T_i\}_{i=i_{k-1}+1, \dots, i_k}$ rozdzielone „wielkimi lukami” pomiędzy torusami T_{i_k} i $T_{i_{k+1}}$. Spełnione są następujące własności:

(A1) $W^u(\Lambda)$ i $W^s(\Lambda)$ mają transwersalne przecięcie wzdłuż kanału homoklinicznego Γ , a każdy torus z danego ciągu przecina dziedzinę funkcji rozpraszania.

(A2) Zawężenie f do każdego z torusów T_i jest topologicznie tranzytywne.

(A3) Każdy podciąg torusów $(T_i)_{i=i_k+1, \dots, i_{k+1}}$ jest łańcuchem przechodnim, tzn. istnieje fragment łuku $\tau_i \subset T_i$ w dziedzinie funkcji rozpraszania taki, że $S(\tau_i)$ przecina

transwersalnie T_{i+1} w dokładnie jednym punkcie dla $i = i_k + 2, \dots, i_{k+1} - 2$, zaś dla $i = i_k + 1, i_{k+1} - 1$ $S(\tau_i)$ przecina transwersalnie T_{i+1} w dokładnie trzech punktach.

(A4) Obszar w Λ , ograniczony T_{i_k} i $T_{i_{k+1}}$ jest strefą niestabilności Birkhoffa.

(A5) Każdy torus, który nie jest brzegiem jednej ze stref Birkhoffa, może być C^0 -aprosymowany z obu stron przez torusy niezmiennicze w Λ .

Wtedy mamy:

Twierdzenie 4 (Zasadnicze Twierdzenie Tego Referatu). *W sytuacji opisanej powyżej, dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ istnieje ciąg $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ i ciąg dodatnich liczb całkowitych $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, taki, że dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ zachodzi:*

$$z_{i+1} = F^{n_i}(z_i); \quad d(z_i, T_i) < \epsilon_i.$$

Metoda dowodzenia: okna topologiczne.

Rozważam n -wymiarową rozmaitość M i odwzorowanie ciągłe $f : M \rightarrow M$.

Definicja 5. *Okno w n -wymiarowej rozmaitości M to zwarty zbiór $W \subset M$, wraz z ciągłą lokalną parametryzacją $(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ ($u + s = n$), zadaną na U - otoczeniu W , taką, że obraz W w tej mapie to prostokąt $[0, 1]^u \times [0, 1]^s$. Odtąd zasadniczo nie rozróżniam W i $[0, 1]^u \times [0, 1]^s$.*

Definicja 6. Dla okna W oznaczam zbiór wyjścia: $W^- = \partial[0, 1]^u \times [0, 1]^s$ i zbiór wejścia $W^+ = [0, 1]^u \times \partial[0, 1]^s$.

Niech W_1 i W_2 będą (u, s) -oknami.

Definicja 7. W_1 jest *poprawnie połączone* z W_2 , jeśli $f(W_1^-) \cap W_2 = \emptyset$, $f(W_1) \cap W_2^+ = \emptyset$ oraz istnieje $y_0 \in [0, 1]^s$ takie, że $f^* : H^u([0, 1]^u \times \{y_0\}, \partial[0, 1]^u \times \{y_0\}) \rightarrow H^u([0, 1]^u \times [0, 1]^s, \partial[0, 1]^u \times [0, 1]^s)$ jest niezerowe.

Przy sprawdzaniu poprawnego połączenia okien, najwygodniej korzystać z poniższego kryterium:

Twierdzenie 8. *Jeśli spełnione są następujące założenia:*

(i) *Istnieje ciągła homotopia $h : [0, 1] \times W_1 \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ taka, że $h_0 = f$, $h([0, 1], W_1^-) \cap W_2 = \emptyset$ i $h([0, 1], W_1) \cap W_2^+ = \emptyset$.*

(ii) *Istnieje odwzorowanie „liniowe” $A : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^u$, takie, że $h_1(x, y) = (Ax, 0)$ oraz $A(\partial[0, 1]^u) \subset \mathbb{R}^u \setminus [0, 1]^u$.*

Poniższe własności są przykładem użyteczności okien:

Twierdzenie 9 (Własność Ważewskiego). *Niech W_i będzie ciągiem (u, s) okien, zaś f_i - ciągiem funkcji ciągłych w M , $i \in \mathbb{Z}$. Jeśli dla każdego i W_i jest poprawnie połączone z W_{i+1} przy pomocy f_i to istnieje $p \in W_0$ takie, że dla każdego i zachodzi: $f_i \circ \dots \circ f_0(p) \in W_{i+1}$. Ponadto, jeśli dla pewnego k i każdego i $W_{i+k} = W_i$, to punkt p można wybrać tak, że $f_{k-1} \circ \dots \circ f_0(p) = p$.*

Twierdzenie 10. *Niech W_i będzie ciągiem rozłącznych (u, s) okien w M , $i = 0 \dots k-1$, f - funkcją ciągłą. Jeśli dla każdych i, j W_i jest poprawnie połączone z W_j przy pomocy f to istnieje maksymalny f -niezmienniczy zbiór $S \subset \bigcup_{i=0, \dots, k-1} \text{int}(W_i)$ i semisprzężony z przesunięciem na k symbolach. Co więcej, przeciwobraz każdej orbity okresowej w Σ_k przez surjekcję sprzęgającą zawiera orbitę okresową f .*

Twierdzenie 11 (Kontynuacja). *Niech W_1 będzie poprawnie połączone z W_2 ze względu na f . Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnego odwzorowania ciągłego g , które leży ε -blisko f , W_1 jest poprawnie połączone z W_2 ze względu na g .*