

1. Stopień pola wektorowego - podstawowe informacje

Niech M będzie podrozmainością $\mathbb{R}^n$ wymiaru m , w - różniczkowalnym polem wektorowym na M , a W - otwartym podzbiorem M takim, że $w^{-1}(0) \cap W$ jest zwarte (w W) (inaczej mówiąc: w i W są *dopuszczalne*). Wtedy parze (w, W) można przypisać liczbę całkowitą $\deg(w, W)$ zwaną *stopniem pola wektorowego* w W . Na przykład, jeśli wszystkie zera pola wektorowego są niezdegenerowane (tzn. jeśli każde $p \in M$ spełniające warunek $w(p) = 0$ spełnia też $\det d_p w \neq 0$), to zbiór $W_0 = w^{-1}(0) \cap W$ jest skończony i można zdefiniować:

$$\deg(w, W) = \sum_{q \in W_0} \operatorname{sgn} \det d_q w,$$

gdzie $T_q M$ za każdym razem utożsamiam z $\mathbb{R}^m$, tak więc odpowiedni wyznacznik jest dobrze zdefiniowany.

Zamiast ścisłej definicji przedstawię użyteczne własności stopnia:

WŁASNOŚĆ 1 (Rozwiązalność). *Jeśli $\deg(w, W) \neq 0$, to istnieje $p \in W$ takie, że $w(p) = 0$.*

WŁASNOŚĆ 2 (Addytywność). *Jeśli W_1 i W_2 są rozłącznymi, otwartymi podzbiórmi M , to $\deg(w, W_1 \cup W_2) = \deg(w, W_1) + \deg(w, W_2)$.*

WŁASNOŚĆ 3 (Wycinanie). *Jeśli $V \subset W$ jest otwarte i zawiera W_0 , to $\deg(w, W) = \deg(w, V)$.*

WŁASNOŚĆ 4 (Kontynuacja). *Jeśli $h : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest homotopią pól wektorowych dopuszczalnych na W . Wtedy $\deg(h(\cdot, \lambda), W)$ nie zależy od λ .*

Dzięki własności wycinania można zdefiniować *indeks* dla izolowanego zera pola wektorowego. Jeśli q jest takim izolowanym zerem dla w , to indeks $i(w, q)$ definiujemy jako stopień $\deg(w, V)$, gdzie V jest odpowiednio małym otoczeniem q . Wtedy:

$$\deg(w, W) = \sum_{q \in W_0} i(w, q).$$

2. Równania różniczkowo-algebraiczne i stowarzyszone pola wektorowe

Rozważam równanie różniczkowo-algebraiczne (RRA) w następującej postaci:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

gdzie $g : U \rightarrow \mathbb{R}^s$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ są ciągłe na otwartym, spójnym zbiorze $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$, g jest klasy C^∞ i $\partial_2 g$ (pochodna cząstkowa ze względu na drugą zmienną) jest odwracalna w całym U .

Niech $T > 0$, $\lambda \geq 0$ i $h : \mathbb{R} \times U$ - ciągłe i T -okresowe. Zajmę się poszukiwaniem T -okresowych rozwiązań układu:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) + \lambda h(t, x, y), \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

$M := g^{-1}(0)$ jest rozmainością klasy C^∞ , lokalnie reprezentowaną jako wykres funkcji z otwartego podzbioru $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^s$. Jednak bezpośredni opis tej rozmainości może być niemożliwy do znalezienia analitycznie, bądź niepraktyczny w zastosowaniach.

Niech $\zeta = (x, y) \in C^1(I, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$ będzie rozwiązaniem (2) dla danego λ . Definiuję funkcje:

$$\Psi : M \ni (p, q) \mapsto (f(p, q), -[\partial_2 g(p, q)]^{-1} \partial_1 g(p, q) f(p, q)) \in T_{(p, q)} M,$$

$$\Upsilon : \mathbb{R} \times M \ni (t, p, q) \mapsto (h(t, p, q), -[\partial_2 g(p, q)]^{-1} \partial_1 g(p, q) h(t, p, q)) \in T_{(p, q)} M.$$

Równania (1) i (2) są równoważne zwyczajnym równaniom różniczkowym na rozmaitości M : odpowiednio $\dot{\zeta} = \Psi(\zeta)$ i $\dot{\zeta} = \Psi(\zeta) + \lambda \Upsilon(t, \zeta)$.

3. Główny wynik

Definiuję $F : U \ni (p, q) \mapsto (f(p, q), g(p, q)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$. Oto Zasadnicze Twierdzenie Tego Referatu:

Twierdzenie 1 (ZTTR, Spadini, 2009). *Przy oznaczeniach i założeniach takich jak do tej pory o U, f, g, F, Ψ , jeśli $\deg(\Psi, M)$ lub $\deg(F, U)$ jest dobrze zdefiniowany, to drugi z nich też i zachodzi zależność:*

$$|\deg(\Psi, M)| = |\deg(F, U)|.$$

W dowodzie korzystam z technicznego lematu:

Lemat 2. *Niech $\epsilon > 0$. Istnieje f_ϵ - funkcja klasy C^1 , taka, że*

$$\sup_{(p, q) \in U} \|f_\epsilon(p, q) - f(p, q)\| < \epsilon$$

i dodatkowo taka, że $(0, 0)$ jest wartością regularną odwzorowania $F_\epsilon = (f_\epsilon, g)$.

4. Zbiór rozwiązań T-okresowych

Przez $C_T(U)$ oznaczam zbiór funkcji ciągłych o wartościach w U . $(\nu; x, y) \in [0, \infty) \times C_T(U)$ jest parą rozwiązań, jeśli (x, y) spełnia (2) dla $\lambda = \nu$. Parę taką, że (x, y) jest stałe, a $\nu = 0$ nazywamy *trywialną*.

Twierdzenie 3. *O U, g, f, h, T, F zakładam to, co do tej pory. Niech $\Omega \subset [0, \infty) \times C_T(U)$ będzie zbiorem otwartym, a $\deg(F, U \cap \Omega) \neq 0$. Wtedy istnieje spójny zbiór Γ nietrywialnych par rozwiązań (2), której domknięcie w $[0, \infty) \times C_T(U)$ przecina zbiór trywialnych par rozwiązań i nie jest zawarty w żadnym zwartym podzbiórze Ω .*

Wniosek 4 (Kontynuacja). *Jeśli dodatkowo $M = g^{-1}(0)$ jest domknięte w $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$. Niech $\deg(F, U \cap \Omega) \neq 0$. Wtedy istnieje składowa spójna zbioru par rozwiązań, przecinająca zbiór trywialnych par rozwiązań, która nie może być jednocześnie ograniczona i zawarta w Ω .*

W szczególności, gdy $\Omega = [0, \infty) \times A$, gdzie $A \subset C_T(U)$ jest otwarty, ograniczony i taki, że w ∂A nie ma T-okresowych rozwiązań (2) dla $\lambda \in [0, 1]$ wtedy równanie (2) przy $\lambda = 1$ ma T-okresowe rozwiązanie w A .

5. Zastosowania

Niech (p_0, q_0) będzie izolowanym zerem F , a $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}^s$ funkcją zadaną na otoczeniu p_0 , taką, że M jest jej wykresem w otoczeniu danego punktu.

Definicja 5. (p_0, q_0) jest *T-rezonansowym* zerem F , jeśli dla $\lambda = 0$ następująca linearyzacja:

$$\dot{\xi} = [\partial_1 f(p_0, q_0) - \partial_2 f(p_0, q_0) d_{(p_0, q_0)} \gamma] \xi$$

posiada niezerowe, T-okresowe rozwiązania.

Jeśli (p_0, q_0) jest zerem nie T-rezonansowym F , to jest zerem niezdegenerowanym. W szczególności, $i(F, (p_0, q_0)) \neq 0$.

Definicja 6. Niech Y -przestrzeń metryczna i $X \subset [0, \infty) \times Y$. $A \subset 0 \times Y$ jest *wyrzutnią* dla X jeśli jest zbiorem otwartym (w $0 \times Y$) i istnieje składowa spójna X , przecinająca A i niezawierająca się w $0 \times Y$.

TWIERDZENIE 7. *Przy założeniach jak w twierdzeniu 1, f -klasy C^1 , $M = g^{-1}(0)$ - domknięte w $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$. Niech (p_i, q_i) dla $i = 1, \dots, r$ będą zerami nie T -rezonansowymi dla F , takimi, że: $\deg(F, U) \neq \sum_{j=1}^r i(F, (p_j, q_j))$. Załóżmy, że (1) nie ma nieograniczonego, spójnego zbioru rozwiązań T -okresowych w $C_T(U)$. Wtedy istnieje co najmniej $r + 1$ różnych T -okresowych rozwiązań (2) dla odpowiednio małych λ .*

Bibliografia

- [FS] M.Furi, M.Spadini *On the set of harmonic solutions of periodically perturbed autonomous differential equations on manifolds* Nonlinear Anal. TMA 29 (1997), no. 8. - źródło większości twierdzeń, do których brakowało tylko metod obliczania stopnia.
- [S] M.Spadini *A note on topological methods for a class of differential-algebraic equations* preprint - źródło ZTTR i ostatecznych rezultatów.