

1. Wprowadzenie

Rozważamy równanie różnicowe

$$B(x_t) = A(x_{t+1}),$$

którego rozwiązanie stanowią ciągi $x_0, x_1, \dots$ liczb rzeczywistych. Funkcje A i B są ciągle określone na $[0, \infty)$, o wartościach w $[0, \infty)$, o następujących własnościach:

- (1) funkcja B jest rosnącą bijekcją;
- (2) funkcje A i B są liniowe i rosnące na przedziale $[c, \infty)$ dla pewnej liczby dodatniej c ; współczynnik kierunkowy funkcji $A|_{[c, \infty]}$ jest mniejszy niż współczynnik kierunkowy funkcji $B|_{[c, \infty]}$;
- (3) na pewnym przedziale $[0, b]$ (z $b < c$) funkcja A jest rosnąca oraz $A(0) \geq 0$ bądź A jest malejąca na $[0, c]$;
- (4) na przedziale $(b, c]$ funkcja A jest malejąca oraz istnieje $x \in (b, c)$ taki, że $A(x) = B(x)$.

Definiujemy $\underline{x}$ oraz $\bar{x}$ w następujący sposób:

$$B(\underline{x}) = A(c), \quad B(\bar{x}) = A(\underline{x}).$$

Interesuje nas przypadek $\bar{x} > c$.

Definiujemy funkcję $f(x) := B^{-1} \circ A(x)$ i otrzymujemy układ dynamiczny

$$x_t = f(x_{t+1}).$$

2. Definicje

Kontinua

- *Kontinuum* nazywamy zwartą spójną przestrzeń metryczną.
- Kontinuum jest *rozkładalne*, gdy można je przedstawić jako sumę dwóch właściwych podkontinuów. Kontinuum nazywamy *nierozkładalnym* gdy nie jest kontinuum rozkładalnym.

Odwrotne granice

Niech $k > 0$. Przez D oznaczamy $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$ dla pewnej liczby dodatniej N .

- Dla każdego $n \in D$ przez X_n oznaczmy niepustą przestrzeń metryczną, natomiast przez f_n ciągle odwzorowanie z X_{n+1} do X_n . Parę (X_n, f_n) nazywamy *ciągą odwrotną*.
- *Odwrotną granicę* ciągu odwrotnego stanowi podzbiór przestrzeni produktowej $\prod_{n \in D} X_n$ o elementach $\mathbf{x}$ (z n -tą koordynatą równą x_n) takich, że $f_n(x_{n+1}) = x_n$. Odwrotna granica ciągu odwrotnego oznaczana jest przez $\varprojlim (X_n, f_n)$.
- Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, f będzie ciągłym odwzorowaniem z X do X . Przez $X^* = \varprojlim (X, f)$ oznaczamy odwrotną granicę ciągu odwrotnego, w którym $X_n = X$ i $f_n = f$ dla każdego $n \in D$.
- Definiujemy odwzorowanie

$$f^*(\mathbf{x}) = f^*((x_0, x_1, \dots)) = (f(x_0), f(x_1), \dots) = (f(x_0), x_0, x_1, \dots)$$

. Odwzorowanie f^* jest homeomorfizmem z X^* do X^* .

3. Dynamika układu

Twierdzenie 1. Niech $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ będzie ciągłym odwzorowaniem, a punktem okresowym f o okresie $n \geq 3$, $b \in O_+(a)$. Jeśli k jest liczbą całkowitą taką, że $f^k(a)$ jest pierwszym (względem porządku na przedziale $[a, b]$) elementem $O_+(a) \setminus \{a\}$ oraz liczby n i k są względnie pierwsze, to $\varprojlim ([a, b], f)$ jest nierozkładalnym kontinuum.

Twierdzenie 2. Niech $K = [\alpha, \beta]$, $h : K \rightarrow K$ będzie takie, że dla pewnego $c \in (\alpha, \beta)$ zachodzi $h(\alpha) = \beta$, $h(\beta) = c$ oraz $h(c) = \alpha$. Niech h będzie zwiężające na $[c, \beta]$ oraz rozszerzające na $[\alpha, c]$. Niech ponadto rozszerzanie na przedziale $[\alpha, c]$ będzie na tyle duże, aby zdominowało ono zwiężanie na pozostałej części przedziału $[\alpha, \beta]$. Wtedy układ dynamiczny związany z h i K posiada orbitę gęstą w K oraz:

- (1) istnieje residualny w K zbiór punktów o orbitach gęstych w K ,
- (2) zbiór punktów okresowych w K jest gęsty w K ,
- (3) układ dynamiczny posiada własność czulej zależności na warunki początkowe.

Twierdzenie 3. Niech $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ będzie ciągłe oraz:

- (1) $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = c$ (gdzie $c \in (\alpha, \beta)$) oraz $f(c) = \alpha$;
- (2) istnieje punkt $d \in (\alpha, c)$ taki, że $f|_{[\alpha, d]}$ jest liniowe i o ujemnym współczynniku kierunkowym $-m_1$ takim, że $0 < m_1 < 1$;
- (3) $f|_{[d, c]}$ jest liniowe i o ujemnym współczynniku kierunkowym $-m_2$;
- (4) $f|_{[c, \beta]}$ jest liniowe i o dodatnim współczynniku kierunkowym $m_3 < 1$;
- (5) $m_2 m_3 > 1$ oraz $m_1 m_2 m_3 < 1$.

Wtedy $\{\alpha, c, \beta\}$ jest przyciągającą orbitą okresową o okresie 3 oraz basen przyciągania B orbity $\{\alpha, c, \beta\}$ jest gęsty w $[\alpha, \beta]$ i zawiera przedział $[\alpha, d]$. Ponadto, $C := [\alpha, \beta] \setminus B$ jest niezmienniczym dla f zbiorem Cantora, zawierającym punkty okresowe o wszystkich okresach.

Twierdzenie 4. Niech $0 < e < c < a < b < d < 1$ oraz niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ posiada następujące własności:

- (a) $f|_{[a, b]} = [e, d]$,
- (b) $f|_{[c, 1]} : [c, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest malejącą bijekcją,
- (c) $f|_{[0, c]}$ jest rosnącą,
- (d) $f(c) = 1$, $f(0) = d = f(a)$, $f(b) = e$, $f(1) = 0$.

Wtedy $\varprojlim([0, 1], f)$ jest albo łukiem albo podwójną topologiczną krzywą $\sin(\frac{1}{x})$.

4. Kilka słów o motywacji

Rozważamy problem maksymalizacji funkcji użyteczności

$$W(\{c_{1t}, c_{2t}\}_{t=0}^{\infty}) := \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{1t}, c_{2t}),$$

gdzie:

- c_{1t} – towary kupowane za gotówkę;
- c_{2t} – towary kupowane na kredyt;
- $\beta \in (0, 1)$ – współczynnik dyskontowania;
- $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 ;
- y – przychód zamieniany na towary; zachodzi $c_{1t} + c_{2t} = y$;
- m_t – zapotrzebowanie na gotówkę aby nabyć towar c_{1t} ;
- p_t – ceny towarów c_{1t} i c_{2t} .

Po wprowadzeniu dodatkowych założeń odnośnie parametrów c_{1t} , c_{2t} i funkcji U oraz wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a otrzymamy równanie

$$x_t U_2(\min(x_t, c), y - \min(x_t, c)) = \frac{\beta}{1 + \theta} x_{t+1} U_1(\min(x_{t+1}, c), y - \min(x_{t+1}, c)),$$

przy czym:

- U_1, U_2 – pochodzne cząstkowe funkcji U ;
- $x_t := \frac{m_t}{p_t}$;
- c – jedyne rozwiązanie równania $U_1(c, y - c) = U_2(c, y - c)$.

Oznaczając lewą stronę powyżej równości przez B i prawą przez A otrzymamy

$$B(x_t) = A(x_{t+1}).$$

Bibliografia

- [I] W. T. Ingram, *Invariant sets and inverse limits*, Topology and Application 126 (2002) 393-408.
- [K] J. Kennedy, D. R. Stockman, J. A. Yorke, *Inverse limits and implicitly defined difference equation from economics*, Topology and Application 154 (2007) 2533-2552.
- [M] R. Michener, B. Ravikumar, *Chaotic dynamics in a cash-in-advance economy*, Journal of Economic Dynamics and Control 22 (1998) 1117-1137.