

Marcin Górecki  
Twierdzenie o antyokresowych oscylacjach LaSalla

---

## 1. Wprowadzenie

Rozważaliśmy równanie postaci

$$x' = f(t, x), \quad (1)$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą oraz spełnia warunek

$$-f(t + T, x) = f(t, -x). \quad (2)$$

## 2. Twierdzenia

Udowodniliśmy twierdzenia:

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli równanie (1), gdzie prawa strona spełnia warunek (2), ma rozwiązanie  $x_0(t)$  określone na przedziale  $[0, +\infty)$  oraz istnieje nieujemna funkcja  $\alpha(t)$  taka, że  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0$  oraz dla dowolnych dwóch rozwiązań  $x(t), y(t)$  zachodzi*

$$|x(t) - y(t)| \leq \alpha(t)|x(0) - y(0)|$$

*dla  $t \geq 0$ , wtedy równanie (1) posiada  $T$ -antyokresowe rozwiązanie.*

**Twierdzenie 2.** *Załóżmy, że  $f$  posiada własność monotoniczności Kamke'go (tzn. dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}^n$  jeśli  $x_j \leq y_j$  dla  $j = 1, \dots, n$  i  $x_i = y_i$  to  $f_i(t, x) \leq f_i(t, y)$ ).*

*Załóżmy dodatkowo, że istnieją funkcje  $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  klasy  $C^1$  takie, że*

$$(H1) \quad \beta \geq 0, \quad \alpha = -\beta, \quad \beta(T) \leq \beta(0),$$

$$(H2) \quad \alpha' \leq f(t, \alpha) \quad \text{oraz} \quad \beta' \geq f(t, \beta).$$

*Wtedy równanie (1) ma  $T$ -antyokresowe rozwiązanie  $x_*(t)$  takie, że*

$$\alpha \leq x_* \leq \beta$$

**Uwaga 1.** *W dowodzie Twierdzenie 2 wykorzystaliśmy Twierdzenie 1.*

## 3. Przykład

Równanie postaci

$$x' = x^3 + \sin(t)$$

ma dokładnie jedno  $\pi$ -antyokresowe rozwiązanie, co wynika z tezy Twierdzenia 2, przyjmując  $\alpha(t) = -2$  ( $\beta(t) = 2$ ).

## Literatura

- [1] R.Wu, *An anti-periodic LaSalle oscillation theorem*, Applied Mathematics Letter 21 (2008) 928 - 933