

Michał Marek

Stabilność i baseny przyciągania powierzchni niezmienniczych

Na seminarium prezentowałem wyniki zawarte w pracy: “**Stability and basins of attraction of invariant surfaces**” autorstwa: *Ruben Diaz-Sierra, Annibal Figueiredo, Tarcisio M. Rocha Filho*.

1. Problem

Rozważaliśmy równanie w postaci quasi-wielomianowej:

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^m A_{ij} \prod_{k=1}^n x_k^{B_{kj}}, \quad i = 1, \dots, n$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po czasie, a $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są rzeczywistymi macierzami prostokątnymi.

2. Definicje

a) Postać skojarzona z naszym równaniem:

$$\dot{U}_i = U_i \sum_{l=1}^m M_{il} U_l, \quad U_j = \prod_{k=1}^n x_k^{B_{jk}}, \quad j = 1, \dots, m$$

gdzie $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{A}$

b) Oznaczamy: W - dziedzina, na której jest określony układ z pkt. a); U_0 -warunek początkowy; $U(U_0, t)$ -rozwiązanie a); $S \subset W$ -powierzchnia niezmiennicza; R - dowolny pierścień funkcji gładkich określonych na W ; D_M -operator skojarzony z układem a)

c) Dla $S \subset W$ i $I \subset R$ definiujemy zbiory:

$$I_{\bar{S}} = \{f \in R : f(S) = 0\} \text{-ideal}$$

$$S_I = \{U \in W : f(U) = 0, \forall f \in I\} \text{-powierzchnia}$$

3. Twierdzenia

Udowodniliśmy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. Rozważmy system z punktu a) i pierścień R taki, że $D_M(R) \subset R$:

- Jeśli $\exists I \subset R$ taki, że $I = \langle I_1, \dots, I_q \rangle$ oraz $D_M(I) \subset I, S_I \neq \emptyset$
Wtedy S_I jest niezmienniczą powierzchnią układu a)
- Jeśli S jest niezmienniczą powierzchnią a) wtedy $D_M(I_S) \subseteq I_S$

Twierdzenie 2. Rozważmy pierścień zamknięty względem D_M .

Jeśli niezmiennicza powierzchnia $\bar{S}$ układu a) jest taka, że $I_{\bar{S}} \neq \{0\}$ oraz $\bar{S} \subset S_{I_{\bar{S}}}$ i $I_{\bar{S}}$ jest skończeniem generowany, wtedy $\bar{S} \subset S_{I_{\bar{S}}}$ jest także niezmienniczą powierzchnią a)

Twierdzenie 3 (Nierówność Wazewskiego). *Rozważmy nieautonomiczny liniowy układ w postaci macierzowej:*

$$\dot{I} = L(t)I$$

gdzie $L(t)$ jest ciągła względem t oraz niech H będzie macierzą hermitowską:

$$H(t) = \frac{1}{2}(L(t) + L^T(t))$$

Oznaczmy przez $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ odpowiednio najmniejszą i największą wartość własną macierzy $H(t)$.

Wtedy:

$$\|I_0\| \exp \left[\int_{t_0}^t \lambda(t') dt' \right] \leq \|I(t; I_0, t_0)\| \leq \|I_0\| \exp \left[\int_{t_0}^t \Lambda(t') dt' \right]$$

gdzie $\|y\| = \langle y, y \rangle$

Twierdzenie 4. *Założmy, że istnieje otwarta dziedzina $\Omega_L \subseteq W$ zawierająca S taka, że dla $U \in \Omega_L$ rozważamy możliwości:*

- (1) $\Lambda(U) < 0$
- (2) $\Lambda(U) \leq 0$
- (3) $\lambda(U) > 0$

gdzie $\Lambda(U), \lambda(U)$ - największa i najmniejsza wartość własna dla macierzy $H(U) = \frac{1}{2}(L(U) + L^T(U))$.

Wtedy dla trzech powyższych możliwości istnieje otwarta dziedzina Π_L zawierająca S taka, że rozwiązanie $U(U_0, t)$ dla $U_0 \in \Pi_L$:

- (1) *zbiega do niezmienniczej powierzchni S - pow. asymptotycznie stabilna*
- (2) *nigdy nie opuszcza Π_L - pow. stabilna*
- (3) *opuszcza Π_L - pow. niestabilna*

Twierdzenie 5. *Rozważmy układ z pkt. a) z niezmienniczą pow. S i zestawem generatorów $I_{\bar{S}}$ spełniających warunek (1) z Twierdzenia. 4.*

Dla oszacowania Ω'_I obszaru Ω_I : $\Omega'_I \subset \Omega_I$ mamy, że jeśli przeciwobraz kuli

$B_\rho = \{I \in \mathbb{R}^p : \|I\| < \rho^2\}$ przez odwzorowanie

$P_I : \mathbb{R}^m \ni (U_1, \dots, U_m) \rightarrow (I_1(U), \dots, I_p(U)) \in \mathbb{R}^p$ jest cały w Ω'_I to ten przeciwobraz zadaje basen przyciągania niezmienniczej powierzchni S .

Jest to oszacowanie dziedziny stabilności S dane przez największe $r > 0$ takie, że:

$$\Pi_I = \{U : I(U) \in B_r\} \subseteq \Omega_I$$