

0.1 Ekspansywność i indeks Conley'a

Definicja 0.1. $S \subset X$ nazywamy izolowanym niezmienniczym zbiorem dla ciągłego odwzorowania $f : X \rightarrow X \Leftrightarrow$

$$\exists I \subset X \text{ zwarty} : S = \text{Inv}I \subset \text{Int}I$$

Gdzie $\text{Inv}I$ oznacza maksymalny niezmienniczy podzbiór I .

Definicja 0.2. Zbiór I nazywamy izolowanym sąsiedztwem dla S .

Definicja 0.3. Dla każdego układu dynamicznego $f : X \rightarrow X$, niech funkcja $f \times f : X \times X \rightarrow X \times X$ będzie określona wzorem $(f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$. Niech $1_x = \{(x, x) \in X \times X\}$ oznacza przekątną $X \times X$.

Definicja 0.4. Funkcja $f : X \rightarrow X$ jest ekspansywna, jeśli przekątna $1_x = \{(x, x) \in X \times X\}$ jest izolowanym, niezmienniczym zbiorem dla $f \times f : X \times X \rightarrow X \times X$.

Definicja 0.5. Niech $S \subset X$ będzie izolowanym, niezmienniczym zbiorem i załóżmy, że N i L takie, że $L \subset N$ są zbiorami zwartymi. Para (N, L) jest parą indeksową dla S pod warunkiem, że N i L są domknięciami swoich wnętrz oraz zachodzą warunki:

1. $\text{cl}(N \setminus L)$ jest izolowanym sąsiedztwem dla S
2. L jest sąsiedztwem dla zbioru wyjściowego (exit set), tzn. $N^- = \{x \in N : f(x) \notin \text{Int}N\}$, w N
3. $f(L) \cap \text{cl}(N \setminus L) = \emptyset$

Definicja 0.6. Niech N_L będzie przestrzenią z punktem bazowym $[L]$ powstałą przez utożsamienie L z punktem $[L]$.

Klasę abstrakcji względem relacji równoważności nazywamy Homotopijnym indeksem Conley'a (homotopy Conley index).

0.2 System indeksowy

Definicja 0.7. Niech $\mathbf{I} = (I_i : i \in \mathbb{Z})$ będzie ciągiem zbiorów zwartych w X . Mówimy, że orbita (x_i) podąża za $\mathbf{I}$ ((x_i) follows $\mathbf{I}$) $\Leftrightarrow$

$$\forall i \in \mathbb{Z} x_i \in I_i$$

Definicja 0.8. Ciąg $\mathbf{I}$ nazywamy izolowanym łańcuchem sąsiedztw $\Leftrightarrow$

$$\forall (x_i) \text{ orbity podążającej za } \mathbf{I} \text{ mamy } x_i \in I_i \text{ dla } i \in \mathbb{Z}$$

Definicja 0.9. Dla $\mathbf{I}$ izolowanego łańcucha sąsiedztw niech $\text{Inv}_0(\mathbf{I}) \subset \text{Int}(I_0)$ oznacza zbiór punktów, których orbity podążają za $\mathbf{I}$, czyli

$$\text{Inv}_0 = \{x \in I_0 : \exists (x_i) \text{ orbita} : x_0 = x \text{ oraz podąża za } \mathbf{I}\}$$

Definicja 0.10. System indeksowy jest skończonym zbiorem par zwartych $P = (P_a = (N_a, L_a) : a \in \mathbf{A})$

1. $\forall a \in \mathbf{A} \exists$ przynajmniej jeden $b \in \mathbf{A} : P_a$ poprzedza (precedes) P_b

Czyli:

a) L_a jest sąsiedztwem zbioru wyjściowego $N_{ab}^- = (x \in N_a : f(x) \notin \text{Int}N_b)$ w N

b) $f(L_a) \cap \text{cl}(N_b \setminus L_b) = \emptyset$

2. Dowolny ciąg $(I_i = \text{cl}(N_{a_i} \setminus L_{a_i})) : P_{a_i}$ poprzedza P_{b_i}

Definicja 0.11. Mówimy, że skończony lub nieskończony ciąg (a_i) jest dopuszczalny (allowable), jeśli odpowiada on drodze na grafie, to znaczy jeżeli P_{a_i} poprzedza $P_{a_{i+1}}$ dla wszystkich i .

Definicja 0.12. Dla systemu indeksowego P , możemy zdefiniować jego zbiór niezmienniczy jako:

$\text{Inv}(P) = \bigcup \text{Inv}_0(I_i = \text{cl}(N_{a_i} \setminus L_{a_i}))$, gdzie sumujemy po wszystkich dopuszczalnych ciągach $(a_i : i \in \mathbb{Z})$.

Definicja 0.13. Niech P będzie systemem indeksowym.

Wtedy $\text{Inv}^m(P) = \{x : \exists (x_i)_{i=-m}^m \text{ gdzie } x_0 = x \text{ i } x_i \in \text{cl}(N_{a_i} \setminus L_{a_i}) \text{ dla niektórych dopuszczalnych ciągów } (a_i)_{i=-m}^m\}$

Twierdzenie 0.14. Niech P będzie systemem indeksowym. Wtedy $\text{Inv}(P) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m(P)$.

Twierdzenie 0.15. Jeżeli P jest system indeksowy to $\text{Inv}(P)$ jest zwartym zbiorem niezmienniczym.

Definicja 0.16. Niech $S \subset X$ będzie izolowanym niezmienniczym zbiorem. System indeksowy P jest systemem indeksowym dla S jeżeli $\text{Inv}(P) = S$.

0.3 Wyszukiwanie orbit

Definicja 0.17. Ciąg P_{a_i} ma niezerową orbitę indeksu Conle'a jeśli każde skończone złożenie $f_{a_{n-1}, a_n} \circ \dots \circ f_{a_m, a_{m+1}}$ jest niezerowe.

Twierdzenie 0.18. Niech P będzie systemem indeksem dla izolowanego sąsiedztwa S i niech (a_i) będzie ciągiem dopuszczalnym. Jeśli (P_{a_i}) ma niezerową orbitę Conle'a to istnieje orbita w S podążająca za $(\text{cl}(N_{a_i} \setminus L_{a_i}))$. Jeżeli f jest ekspansywna i średnica zbioru $(\text{cl}(N_{a_i} \setminus L_{a_i}))$ jest odpowiednio mała to ta orbita jest jedyna.

0.4 Istnienie indeksu systemowego

Twierdzenie 0.19. Niech f będzie ekspansywna dla izolowanego, niezmienniczego zbioru S . Wtedy istnieje system indeksowy $P = \{(N_a, L_a)\}$ dla S z dowolnie małą średnicą.