

REKURENCJA PRODUKTOWA I ROZŁĄCZNOŚĆ

PIOTR OPROCHA

Niech para (X, f) oznacza odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow X$ na przestrzeni metrycznej zwartej (X, d) . Mówimy, że punkt $x \in X$ jest *produktowo rekurencyjny* gdy jest rekurencyjny oraz dla dowolnego (Y, g) i punktu rekurencyjnego $y \in Y$ (dla g) para (x, y) jest punktem rekurencyjnym dla $(X \times Y, f \times g)$.

Para punktów $x, y \in X$ jest *proksymalna* gdy $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Punkt x jest *dystalny* gdy nie jest proksymalny z żadnym punktem $y \neq x$ z domknięcia swojej orbity.

Znana jest następująca charakteryzacja punktów produktowo rekurencyjnych:

Theorem 1. *Punkt $x \in X$ jest produktowo rekurencyjny wtedy i tylko wtedy gdy jest dystalny.*

Punkt x jest *minimalny* (lub *jednostajnie rekurencyjny*) gdy jest elementem układu minimalnego. Można osłabić definicję punktu produktowo rekurencyjnego w następujący sposób. Mówimy, że punkt $x \in X$ jest *słabo produktowo rekurencyjny* gdy jest rekurencyjny oraz dla dowolnego układu minimalnego (Y, g) i punktu $y \in Y$ (czyli punktu jednostajnie rekurencyjnego) para (x, y) jest punktem rekurencyjnym dla $(X \times Y, f \times g)$. Okazuje się, że tak postawiona definicja jest istotnie słabsza, tzn. istnieją punkty które ją spełniają a nie są dystalne.

Układy (X, f) , (Y, g) są *rozłączne*, jeżeli dowolny zbiór domknięty $J \subset X \times Y$ niezmienniczy dla $f \times g$ którego rzutowania na kolejne współrzędne wynoszą odpowiednio X i Y (jest to tak zwane *połączenie*) musi spełniać warunek $J = X \times Y$.

Podczas referatu

- (1) Wykażę związki definicji układów rozłącznych ze słabą rekurencją produktową.
- (2) Omówię aktualnie znane klasy układów które są rozłączne z dowolnym układem minimalnym.
- (3) Wykażę, że słabe mieszanie (a także jego lokalna wersja, definiowana poprzez zbiory słabo mieszające) wraz z odpowiednimi warunkami zapewniającymi regularne powracanie, gwarantują słabą rekurencję produktową.
- (4) Przedstawię przykłady układów spełniających założenia omawianych twierdzeń. W szczególności przedstawię przykład punktu słabo produktowo rekurencyjnego ale nie dystalnego.

Aktualnie następujące problemy są otwarte:

- (1) Czy każdy jednostajnie rekurencyjny punkt słabo produktowo rekurencyjny jest dystalny? Inaczej mówiąc, czy w kontekście układów minimalnych, słaba rekurencja produktowa i rekurencja produktowa są pojęciami równoważnymi?
- (2) Jak wygląda pełna charakteryzacja układów rozłącznych z dowolnym układem minimalnym (znane są tylko pewne warunki wystarczające przedstawione podczas referatu)?

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA, CAMPUS DE ESPINARDO, 30100
MURCIA, SPAIN – AND – FACULTY OF APPLIED MATHEMATICS, AGH UNIVERSITY OF SCIENCE
AND TECHNOLOGY, AL. MICKIEWICZA 30, 30-059 KRAKÓW, POLAND.

E-mail address: `oprocha@agh.edu.pl`