

Topologiczne podejście do istnienia rozwiązań dla nieliniowych równań różniczkowych z kawałkami stałym argumentem

1. WPROWADZENIE

Rozważamy nieliniowe równania różniczkowe z kawałkami stałym argumentem (skrótowo: PCA- *piecewise constant argument*), czyli:

$$(1) \quad \dot{u}(t) = g(t) + F([t], u([t])), \text{ gdzie}$$

$[t]$ to część całkowita liczby t , $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $F : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ są funkcjami ciągłymi, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $a \in \mathbb{N}$ jest ustalone, natomiast $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Ponadto przyjmujemy oznaczenie: $\mathbb{N}(a) = \{a, a + 1, \dots\} \subset \mathbb{N}$.

Definicja 1. Funkcję $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ nazywamy **rozwiązaniem** równania różniczkowego (1), jeśli spełnia następujące warunki:

- $u(t)$ jest ciągła na $[a, \infty)$;
- pochodna $\dot{u}(t)$ istnieje w każdym punkcie $[a, \infty)$, oprócz punktów zbioru $\mathbb{N}(a)$, gdzie istnieją pochodne jednostronne;
- $u(t)$ spełnia (1) na każdym przedziale $[k, k + 1)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Dzięki ciągłości rozwiązania $u(t)$ dla (1), można łatwo uzyskać następującą rekurencję:

$$(2) \quad \Delta u(k) = G(k) + F(k, u(k)),$$

gdzie $\Delta u(k) = u(k + 1) - u(k)$, $G(k) = \int_k^{k+1} g(s) ds$, $k \in \mathbb{N}(a)$.

- Niech Ω będzie **obszarem podstawowym** w euklidesowej (t, u) -przestrzeni danym przez:

$$\Omega = \{(t, u) : V(t, u) < 0\},$$

gdzie $V : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

- Dla każdego $k \in \mathbb{N}(a)$ **k -tą sekcją** Ω w euklidesowej (k, u) -przestrzeni nazywamy zbiór:

$$\Omega(k) = \{(k, u) : V(k, u) < 0\}.$$

- Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}(a)$ określamy **cylinder relatywny** $\mathbb{V}_{k, k+1}$ dla Ω , jako:

$$\mathbb{V}_{k, k+1} = \{(t, u) : V(t, u) < 0, k \leq t \leq k + 1\}.$$

- Definiujemy odwzorowanie $\mathcal{F} : \mathbb{N}(a) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(a) \times \mathbb{R}^n$ przez:

$$\mathcal{F}(k, u) = (k + 1, u + F(k, u) + G(k)).$$

Oczywistym jest, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}(a)$, $\mathcal{F}$ jest odwzorowaniem ciągłym z (k, u) -przestrzeni w $(k + 1, u)$ -przestrzeń.

Definicja 2. Załóżmy, że $\mathcal{F} : \mathbb{N}(a) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(a) \times \mathbb{R}^n$ jest ciągłym odwzorowaniem z (k, u) -przestrzeni w $(k+1, u)$ -przestrzeń dla wszystkich $k \in \mathbb{N}(a)$. Niech:

$$\delta^+(P) = \{\underbrace{\mathcal{F} \circ \dots \circ \mathcal{F}}_n(P) : n \in \mathbb{N}\},$$

gdzie $P \in \Omega(a)$ oraz $\mathcal{F}^0 \equiv id$. Wtedy mówimy, że $\delta^+(P)$ jest **dyskretną trajektorią** dla $P \in \Omega(a)$, zgodnie z (1).

Definicja 3. Jeśli A i B takie, że $A \subset B$ są zbiorami w przestrzeni topologicznej oraz $\pi : B \rightarrow A$ jest odwzorowaniem ciągłym z B w A takim, że $\pi(P) = P$ dla wszystkich $P \in A$, wtedy mówimy, że π jest **retrakcją** B na A , natomiast A jest nazywane **retraktem** B .

Definicja 4. Załóżmy, że $u = u(t)$ jest rozwiązaniem (1) na przedziale $[k, k+1)$ spełniającym $u(t^0) = u^0$, gdzie $(t^0, u^0) \in \partial \mathbb{V}_{k,k+1}$ i $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $V(t, u(t))$ jest różniczkowalna w t^0 , wtedy pochodną nazywamy **pochodną odwzorowania definiującego** $V(t, u(t))$ w punkcie (t^0, u^0) i oznaczamy przez $\dot{V}(t^0, u^0)$, gdzie

$$\begin{aligned} \dot{V}(t^0, u^0) &= \dot{V}(t, u)|_{t=t^0} = \\ &= \frac{\partial V(t^0, u^0)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t^0, u^0)}{\partial u_i} \cdot (g(t^0) + F(k, u(k)))_i, \end{aligned}$$

gdzie $(g(t^0) + F(k, u(k)))_i$ oznacza i -tą współrzędną składnika $g(t^0) + F(k, u(k))$.

Definicja 5. Punkt (t^0, u^0) nazywamy **ściśle wyjściowym** dla Ω zgodnie z (1) wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego rozwiązania $u = u(t)$ równania różniczkowego (1), spełniającego $u(t^0) = u^0$, istnieje małe $\varepsilon > 0$ takie, że $(t, u(t)) \in \Omega$ dla $t^0 - \varepsilon < t < t^0$ oraz $(t, u(t)) \notin \bar{\Omega}$ dla $t^0 < t < t^0 + \varepsilon$.

2. TWIERDZENIE GŁÓWNE

Będziemy rozważać zagadnienie początkowe:

$$\dot{u}(t) = g(t) + F([t], u([t]))$$

$$(3) \quad u(a) = u^a,$$

dla $(a, u^a) \in \Omega(a)$.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}(a)$,

- (1) $\Omega(k)$ jest otwartym, ograniczonym i jednospójnym podzbiorem (k, u) -przestrzeni; (**Komentarz:** należy założyć, że $\partial \Omega(k)$ nie jest retraktem $\bar{\Omega}(k)$)
- (2) pochodna odwzorowania definiującego $V(t, u)$ w każdym punkcie $\partial \mathbb{V}_{k,k+1}$ jest dodatnia;
- (3) istnieje retrakcja π_k ze zbioru $\partial \mathbb{V}_{k,k+1}$ na $\partial \Omega(k)$.

Wtedy istnieje rozwiązanie $u = u(t)$ problemu początkowego (3) takie, że $(t, u(t)) \in \Omega$ dla wszystkich $t \geq a$.

3. ZASTOSOWANIA

Sieć neuronowa z czasem ciągłym, składająca się z n połączonych neuronów, jest opisana przez układ równań różniczkowych postaci:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + I_i(t),$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

$x_i(t)$ oznacza potencjał neuronu i w czasie t ,

$a_i(t)$ oznacza tempo z jakim neuron i przywraca swój potencjał do stanu spoczynku, gdy jest odizolowana od innych neuronów i danych wejściowych,

$f_i(\cdot)$ oznacza nieliniową funkcję wyjściową,

$b_{ij}(t)$ oznacza siłę zależności między j -tym neuronem a i -tym, wreszcie

$I_i(t)$ oznacza zewnętrzne źródło danych podawanych neuronowi i .

Rozważmy równania różniczkowe z częściowo stałym argumentem postaci:

$$(4) \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i([t])x_i([t]) + \sum_{j=1}^n b_{ij}([t])f_j(x_j([t])) + I_i(t).$$

Dzięki ciągłości rozwiązania równania (7), otrzymujemy klasę sieci neuronowych z czasem dyskretnym typu:

$$(5) \quad \Delta x_i(k) = -a_i(k)x_i(k) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(k)f_j(x_j(k)) + \int_k^{k+1} I_i(t)dt,$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 6. Dziedzinę podstawową $\mathcal{P}_\Omega$ w (t, x) -przestrzeni nazywamy **zbiorem wielościennym**, jeśli istnieją funkcje ciągłe o wartościach rzeczywistych $\mu_1(t, x), \mu_2(t, x), \dots, \mu_n(t, x)$ takie, że:

$$\mathcal{P}_\Omega = \{(t, x) : \mu_i(t, x) < 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ oraz } t \geq 0\}.$$

gdzie $\mu_i(t, x) = (x_i - \alpha_i(t))(x_i - \beta_i(t))$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha_i(t) < \beta_i(t)$ są funkcjami ciągłymi zdefiniowanymi na przedziale $[0, \infty)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Definicja 7. Zbiór wielościenny $\mathcal{P}_\Omega$ nazywamy **regularnym** zgodnie z (4), jeśli pochodna odwzorowania definiującego $\mu_i(t, x)$ jest dodatnia dla wszystkich punktów brzegu $\mathbb{V}_{k,k+1}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $k \in \mathbb{N}(a)$.

Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ definiujemy **k-tą sekcję** $\mathcal{P}_\Omega$, jako $\mathcal{P}_\Omega(k) = \mathcal{P}_\Omega|_{t=k}$ oraz **cylinder relatywny** na $[k, k+1]$ dla $\mathcal{P}_\Omega$, jako:

$$\mathbb{V}_{k,k+1} = \{(t, x) \in \mathcal{P}_\Omega : k \leq t \leq k+1\}.$$

Ponadto definiujemy:

$$L_i = \{(t, x) : \mu_i(t, x) = 0 \text{ oraz } \mu_j(t, x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, t \geq 0\}.$$

Wtedy brzegi $\mathcal{P}_\Omega(k)$ oraz $\mathbb{V}_{k,k+1}$ są dane odpowiednio przez:

$$\partial\mathcal{P}_\Omega(k) = \{(t, x) \in \bigcup_{i=1}^n L_i : t = k\},$$

$$\partial\mathbb{V}_{k,k+1} = \{(t, x) \in \bigcup_{i=1}^n L_i : k \leq t \leq k+1\}.$$

Twierdzenie 2. *Założmy, że wielościenny zbiór $\mathcal{P}_\Omega$ jest regularny dla (4). Wtedy istnieje ciągle rozwiązanie (4) takie, że dla $t \in [0, \infty)$ oraz $i = 1, 2, \dots, n$,*

$$\alpha_i(t) < x_i(t) < \beta_i(t).$$