

Zbiory Cantora jako atraktory iterowanych systemów funkcyjnych.

Magdalena Kiełek
12 marca 2010

*Na podstawie artykułu: "IFS attractors and Cantor sets"
Sylvain Crovisier, Michal Rams [Topology and its Applications 153 (2006) 1849–1859]*

0.1 Wprowadzenie

Definicja 0.1. Iterowanym systemem funkcyjnym (IFS) nazywamy skończony zbiór kontrakcji $\{f_1, \dots, f_n\}$ działających na zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) . Oznaczamy go przez $\{X, f_1, \dots, f_n\}$.

Definicja 0.2. Zbiorem granicznym lub atraktorem iterowanego systemu funkcyjnego nazywamy zbiór $K \subset X$ niezmienniczy względem tego systemu, w sensie:

$$K = \bigcup_{i=1}^n f_i(K)$$

Definicja 0.3. Niech $\mathcal{H}(X)$ będzie rodziną zwartych, niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X, d) . Niech $\{X, f_1, \dots, f_n\}$ będzie iterowanym systemem funkcyjnym. Odzwzorowanie $F: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ zdefiniowane wzorem

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A), \quad \text{dla} \quad A \in \mathcal{H}(X)$$

nazywamy operatorem Hutchinsona-Barnsleya.

Twierdzenie 0.1. Dowolny iterowany system funkcyjny $\{X, f_1, \dots, f_n\}$ na przestrzeni $X \subset \mathbb{R}^n$ posiada dokładnie jeden niepusty, zwarty atraktor, który jest granicą kolejnych iteracji operatora Hutchinsona-Barnsleya na dowolnym zbiorze z $\mathcal{H}(X)$.

0.2 Zbiory Cantora

Pierwowzorem tego typu obiektów jest trójkowy zbiór Cantora powstały na odcinku $[0, 1]$ poprzez ustawiczny podział odcinków na trzy części i wycinanie części środkowej.

Definicja 0.4. Zbiorem Cantora nazywamy zbiór homeomorficzny z trójkowym zbiorem Cantora.

Definicja równoważna: Zbiorem Cantora nazywamy zwartą przestrzeń metryczną, która jest doskonała (każdy jej punkt jest punktem skupienia) oraz całkowicie niespójna (jedynymi spójnymi zbiorami są singletony).

0.3 Zbiory Cantora a atraktory IFS

Klasyczny, trójkowy zbiór Cantora jest atraktorem iterowanego systemu funkcyjnego $\{[0, 1], f_1, f_2\}$, gdzie $f_1(x) = \frac{x}{3}$ oraz $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ są odwzorowaniami działającymi na przestrzeni $[0, 1]$ z metryką euklidesową. Jednak nie każdy zbiór Cantora jest granicą pewnego IFS. Istnieją metryki, dla których ta zależność nie zachodzi.

Twierdzenie 0.2. *Istnieje zbiór Cantora X_1 oraz probabilistyczna miara borelowska μ o nośniku X_1 taka, że dla każdej kontrakcji $f : X_1 \rightarrow X_1$ zachodzi $\mu(f(X_1)) = 0$.*

Taki zbiór nie może być izometryczny z atraktorem żadnego iterowanego systemu funkcyjnego $\{f_1, \dots, f_n\}$ (nawet gdy dopuścimy przeliczalnie wiele funkcji w definicji IFS) ponieważ $\mu(X_1) = 1$ ale $f_1(X_1) \cup \dots \cup f_n(X_1)$ jest miary zero względem μ .

Wniosek

Dla każdego IFS na przestrzeni metrycznej, zupełnej (X, d) atraktor tego systemu funkcyjnego nie jest izometryczny ze zbiorem Cantora X_1 zdefiniowanym w Twierdzeniu 2.1.

Twierdzenie 0.3. *Istnieje zbiór Cantora $X_2 \subset \mathbb{R}^3$ taki, że jeżeli homeomorfizm f spełnia $f(X_2) \subset X_2$ to $f|_{X_2} = id$.*

Zbiór X_2 jest odmianą zbioru zwanego *naszyjnikiem Antoine'a*. W szczególności skończony zbiór homeomorfizmów z $\mathbb{R}^3$ nie może być iterowanym systemem funkcyjnym, którego atraktorem jest X_2 .

Przykład ten można łatwo uogólnić na wyższe wymiary ale na prostej rzeczywistej oraz na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ sytuacja jest diametralnie inna.

Twierdzenie 0.4. *Dla każdego zbioru Cantora $X \subset \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{R}^2$) oraz dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ istnieje homeomorfizm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (lub $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), który jest kontrakcją i spełnia $f(X) \subset X$ oraz $f(x) = y$.*