

Wniosek z twierdzenia Poincare-Bendixsona oraz okresowe canards

Praca przedstawia rolę metod topologicznych w analizie trajektorii okresowych typu canard. Zastosujemy wniosek z twierdzenia Poincarego-Bendixsona by pokazać istnienie okresowych płaskich canard. Rozważmy równanie różniczkowe

$$(1) \quad \dot{z} = f(z, a)$$

gdzie f jest gładką, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, oraz $a \in [a_-, a_+]$ jest parametrem. Niech Γ będzie krzywą Jordana która ogranicza otwartą dziedzinę D . Załóżmy że dla każdego $a \in [a_-, a_+]$ istnieje punkt równowagi $e_a \in D \cup \Gamma$ oraz

$$(2) \quad \det J(e_a) > 0, a_- \leq a \leq a_+$$

Ponadto zakładamy, że

$$(3) \quad \text{tr} J(e_{a_-}) \text{tr} J(e_{a_+}) < 0$$

TWIERDZENIE 0.1. *Niech układ (ref1) nie ma cykli zawartych w $D \cup \Gamma$ dla $a = a_-, a_+$. Wtedy dla pewnych $a \in [a_-, a_+]$ istnieje cykl układu (1) który jest zawarty w $D \cup \Gamma$ i który dotyka Γ*

PRZYKŁAD 0.2. Rozważmy układ

$$(4) \quad \dot{x} = y, \epsilon \dot{y} = -x + F(y + a)$$

gdzie $\epsilon > 0$. Załóżmy że $F(0) = 0$, $F'(y) < 0$ dla $y < 0$ oraz $F'(y) > 0$ dla $y > 0$. Krzywa $x = F(y)$ jest krzywą powolną układu (4) dla $a = 0$. Gałąź $x = F(y)$, $y < 0$ jest częścią przyciągającą, a gałąź $x = F(y)$, $y > 0$ odpychającą. Wierzchołek jest punktem zwrotnym. Okresowe canards są okresowymi rozwiązaniami układu (4).

DEFINICJA 0.3. Mówimy że w $\alpha = 0$ układ (4) ma rodzinę okresowych canards rzędu $\alpha > 0$, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ można dopasować a_ϵ i rozwiązanie okresowe $(x_{\epsilon, a_\epsilon}(t), y_{\epsilon, a_\epsilon}(t))$ układu $\dot{x} = y, \epsilon \dot{y} = -x + F(y + a_\epsilon)$ takie że

$$(5) \quad \max\{x_{\epsilon, a_\epsilon}(t) : y_{\epsilon, a_\epsilon}(t) = 0\} = \alpha$$

TWIERDZENIE 0.4. *Istnieją okresowe canards układu (4) dla dowolnie zadanego $\alpha > 0$*

PRZYKŁAD 0.5. Rozważmy układ (4) z funkcją bimodalną. Załóżmy że $F(0) = 0$, $F'(y) < 0$ dla $y < 0$ i $y > \mu > 0$ oraz $F'(y) > 0$ dla $0 < y < \mu$. Okresowe canards o istotności α mogą istnieć tylko dla $0 < \alpha \leq F(\mu)$.

DEFINICJA 0.6. Mówimy że układ ma okresową headless canard rzędu $\alpha > 0$ w $a = 0$, jeśli zachodzi (5). Mówimy że układ ma okresowy headed canard o istotności $\alpha > 0$ jeśli $\min\{x_{\epsilon, a_\epsilon}(t) : y_{\epsilon, a_\epsilon}(t) = \mu\} = \alpha$

TWIERDZENIE 0.7. *Istnieje okresowa headed i headless canard o dowolnie zadanej istotności $\alpha \in (0, F(\mu))$*