

Dynamika foliacji

Marcin Kulczycki i Dominik Kwietniak

Definicja. Niech dana będzie $m + n$ wymiarowa rozmaitość gładka M . Foliacją wymiaru m i kowymiaru n rozmaitości M nazywamy pokrycie otwarte M rodziną $U = \{U_i\}_{i \in I}$ taką, że dla każdego $i \in I$ zadany jest dyfeomorfizm $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U_i$ taki, że na każdym niepustym przecięciu $U_i \cap U_j$ odwzorowanie

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

jest postaci

$$(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(x, y) = (f_{ij}(x, y), g_{ij}(y))$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Mówiąc nieprecyzyjnie, foliacja jest to podział M na parami rozłączne podrozmaitości wymiaru m który lokalnie wygląda jak dyfeomorficzna deformacja podziału $\mathbb{R}^{m+n}$ poprzez hiperpłaszczyzny postaci $\mathbb{R}^m \times \{y\}$.

Przykłady foliacji:

- potok bez punktów stałych
- foliacja Reeba
- przykład Hirscha
- działanie grupy Liego w którym wymiar podgrupy izotropii jest taki sam dla wszystkich punktów z M

Nie każda foliacja pochodzi od działania pewnej grupy Liego (np. foliacja Reeba nie jest efektem działania żadnej takiej grupy na S^3).

W roku 2003 Pilyugin i Tikhomirov zdefiniowali własność shadowingu dla działań grupy $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^n$, która jest uogólnieniem znanych poprzednio definicji shadowingu dla $\mathbb{Z}^d$ oraz $\mathbb{R}$.

Alternatywą dla ich definicji jest następujący zestaw pojęć:

Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Niech $h : \mathbb{R}^n \times X \rightarrow X$ będzie działaniem ciągłym $\mathbb{R}^n$ na X .

Definicja. *Pseudo-orbitę* nazywamy ciągle odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$.

Definicja. Niech $p \in \mathbb{R}^n$. *Prędkością pseudo-orbity f w punkcie $f(p)$ względem h* nazywamy:

$$V_f^h(p) = \limsup_{\mathbb{R}^n \ni q \rightarrow 0} \frac{d(f(p+q), h(q, f(p)))}{\|q\|}$$

Definicja. Niech $\delta > 0$ będzie dane. Pseudo-orbita f jest δ -pseudo-orbitą h gdy dla każdego $p \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $V_f^h(p) < \delta$.

Definicja. Niech $\varepsilon > 0$ i pewien punkt $x \in X$ będą dane. Mówimy, że pseudo-orbita f jest ε -śledzona przez x wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $p \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $d(f(p), h(p, x)) < \varepsilon$.

Definicja. Mówimy, że h ma *własność shadowingu* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że każda δ -pseudo-orbita jest ε -śledzona przez pewien punkt $x \in X$.

Dla $n = 1$ to definiuje pewną własność śledzenia dla układów dynamicznych z czasem ciągłym, która ma ładną fizyczną interpretację - podczas gdy zwykła orbita reprezentuje ruch cząstki, która unoszona jest biernie poprzez potok, to pseudo-orbita jest możliwą trajektorią cząstki, która posiada ograniczoną możliwość ingerencji w swój wektor prędkości.

Wiemy, że zawieszenie odwzorowania posiadającego POTP nie musi mieć własności shadowingu w powyższym sensie (identyczność na przestrzeni jednoelementowej służy za przykład). Nie wiemy natomiast, czy potok stroboskopowy działania $\mathbb{R}$ posiadającego shadowing musi mieć POTP.

Definicja. Mówimy, że h jest *dystalne* gdy

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \setminus \{x\} : \inf_{a \in \mathbb{R}^n} d(f(a, x), f(a, y)) > 0.$$

W przypadku czasu dyskretnego wiadomo, że dystalność i POTP są generalnie własnościami wykluczającymi się (Aoki, Dateyama i Komuro udowodnili w 1982, że homeomorfizmy zwartych przestrzeni spójnych nie mogą być jednocześnie dystalne i mieć POTP; prof. Ombach wykazał silniejsze wyniki w 1994). Interesującym pytaniem (na które nie znamy odpowiedzi) jest to, czy dystalne działanie $\mathbb{R}^n$ na zwartej i spójnej przestrzeni może mieć własność shadowingu.