

SEMINARIUM UKŁADY DYNAMICZNE

Tytuł: **Shadowing dla działań grupy $\mathbb{R}^n$**
Referent: **Marcin Kulczycki i Dominik Kwietniak**
Data: **22 X 2010, 29 X 2010**

Niech dana będzie przestrzeń metryczna (X, d) i ciągłe działanie $h: G \times X \rightarrow X$ grupy $G = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$ na X , gdzie $m, n \geq 0$ i $m + n \neq 0$ (przyjmując, że jeśli $m = 0$ lub $n = 0$ to odpowiednio $G = \mathbb{R}^n$ lub $G = \mathbb{Z}^m$).

Df. Niech $\mathbf{R}_0(G)$ będzie zbiorem homeomorfizmów $G = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$ postaci $\text{id}_{\mathbb{Z}^m} \times \alpha$, gdzie α jest zachowującym orientację homeomorfizmem $\mathbb{R}^n$ dla którego zero jest punktem stałym.

Df. Niech dane będą $\delta > 0$ i $T > 0$. Mówimy, że funkcja (niekoniecznie ciągła) $f: G \rightarrow X$ jest (δ, T) -pseudo-orbitą (δ -pseudo-orbitą, jeśli $G = \mathbb{Z}^m$) działania h gdy dla każdego $\mathbf{x} = (l_1, \dots, l_m, x_1, \dots, x_n) \in G$, dla każdego $\tau \in [-T, T]$ i dla każdego $\mathbf{t} = (s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n) \in \{-1, 0, 1\}^m \times \{0, \tau\}^n$ takich, że dokładnie jedna z liczb $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$ jest niezerowa zachodzi

$$d(f(\mathbf{x} + \mathbf{t}), h(\mathbf{t}, f(\mathbf{x}))) < \delta.$$

Df. Niech $\varepsilon > 0$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbf{R}_0(G)$ i $f: G \rightarrow X$ będą dane. Mówimy, że f jest ε -śledzona przez x poprzez α wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\mathbf{t} \in G$ zachodzi

$$d(f(\mathbf{t}), h(\alpha(\mathbf{t}), x)) < \varepsilon.$$

Df. Mówimy, że h ma “weakly parametrized shadowing property” wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $\delta > 0$ i $T > 0$ takie, że każda (δ, T) -pseudo-orbita h jest ε -śledzona przez pewien punkt $x \in X$ poprzez pewne $\alpha \in \mathbf{R}_0(G)$.

Twierdzenie. Jeśli X jest zwartą przestrzenią o wymiarze topologicznym 1, a h jest minimalnym działaniem dystalnym posiadającym własność śledzenia zdefiniowaną powyżej, to h jest równociągłe, X jest solenoidem, a działanie h na X jest topologicznie równoważne zawieszeniu pewnej maszyny dodającej (przyjmując, że cykliczne permutacje skończonych zbiorów zaliczamy do maszyn dodających, a zbiór homeomorficzny z okręgiem jest zdegenerowanym przypadkiem solenoidu).

Twierdzenie. Jeśli X jest zwarte i spójne, a h jest równociągłym działaniem $\mathbb{R}^n$ z własnością śledzenia zdefiniowaną powyżej, to h jest działaniem minimalnym.