

Niech $f_0, f_1: S^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą immersjami klasy C^2 .

Mówimy, że f_0 i f_1 są regularnie homotopijne jeżeli istnieje gładka homotopia immersji f_t , $t \in [0, 1]$.

Dla f_0, f_1 można wprowadzić niezmiennik $\Omega(f_0, f_1) \in \pi_q(V_{n,q})$, gdzie $V_{n,q}$ jest rozmaitością Stiefela q -wektorów liniowo niezależnych w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie (S.Smale, 1957)

Jeżeli $q = 2$ to f_0 i f_1 są regularnie homotopijne wtedy i tylko wtedy gdy $\Omega(f_0, f_1) = 0$.

Ponieważ $\pi_2(V_{3,2}) = 0$, każde dwie immersje $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ są regularnie homotopijne; w szczególności inkluzja $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ jest homotopijna z odwzorowaniem antypodycznym $S^2 \ni x \rightarrow -x \in \mathbb{R}^3$. Konstrukcje regularnych homotopii między tymi immersjami zostały podane przez A.Shapiro, A.Philipsa, B.Morina i W.Thurston.