

SEMINARIUM UKŁADY DYNAMICZNE

Tytuł: **Chaos in Discrete Delay Population Model**
Referent: **Justyna Ogorzały**
Data: **11 I 2013**

W referacie rozważymy dyskretny model populacyjny z opóźnieniem

$$x(n+1) = x(n) + \gamma x(n)(a + bx(n-k) - cx^2(n-k)), \quad (1)$$

gdzie $a > 0$, $c > 0$, $b \in \mathbb{R}$ oraz k jest dodatnią liczbą całkowitą, natomiast $\gamma > 0$ to parametr.

Równanie (1) możemy traktować jako dyskretny odpowiednik równania różniczkowego z opóźnieniem postaci

$$x'(t) = r(t)x(t)(a + bx(t-\tau) - cx^2(t-\tau)), \quad (2)$$

gdzie $r(t) \in C([0, \infty); (0, \infty))$, $a > 0$, $c > 0$, $b \in \mathbb{R}$ są stałymi oraz $\tau > 0$ jest opóźnieniem. Równanie (2) modeluje populację jednego gatunku, wykazującego efekt Allee, w którym współczynnik wzrostu per capita jest kwadratową funkcją gęstości z opóźnieniem.

Równanie (1) przedstawimy w postaci $(k+1)$ -wymiarowego dyskretnego układu dynamicznego

$$u(n+1) = \begin{pmatrix} u_2(n) \\ u_3(n) \\ \vdots \\ u_{k+1}(n) \\ u_{k+1}(n) + \gamma u_{k+1}(n)(a + bu_1(n) - cu_1^2(n)) \end{pmatrix} := F(u(n)), \quad (3)$$

gdzie $u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+1})^T \in \mathbb{R}^{k+1}$. Układ (3) posiada trzy punkty stałe:

$$O := (0, \dots, 0)^T, \quad P := (p, \dots, p)^T, \quad Q := (q, \dots, q)^T \in \mathbb{R}^{k+1},$$

gdzie $p := \frac{b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2c} < 0$, $q := \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2c} > 0$.

Łatwo można wykazać, że punkt O nie jest snap-back repeller, z kolei punkty P i Q mogą być snap-back repeller, jeśli nałożymy na γ pewne warunki. Mówiąc ściśle wykażemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech stałe a, b, c oraz parametr γ będą takie jak w układzie (1). Wtedy istnieje dodatnia stała γ_0 taka, że dla każdej wartości parametru $\gamma > \gamma_0$ punkt stały P jest regularnym niezdegenerowanym snap-back repeller układu (3). W konsekwencji układ (1) jest chaotyczny w sensie Devaney'a i w sensie Li-Yorke'a.*

Analogiczny wynik można uzyskać dla punktu Q .